La topología, una disciplina inherente a las escalas
El elefante y el picaflor – Los viajes de Gulliver

Nottoli, Hernán Santiago
nachosantiago40@gmail.com
Sede de investigación o pertenencia: Universidad de Buenos Aires – Facultad de Arquitectura Diseño y Urbanismo – Centro de Matemática y Diseño

Línea temática 1. Escalas, diagnósticos y representaciones

Resumen
En los contenidos de esta ponencia, se enfatiza la idea de la numerosa presencia de escalas, que sin ser especialista matemático o agrimensor, el ser humano maneja en su vida cotidiana. Por citar algunos ejemplos: es probable que muchos en su propia casa posean el plano de la vivienda que habitan y que ya posee una proporción escalar del tipo 1:100. Si además se trata de personas que son aficionadas a viajar, no es difícil que se hayan manejado con diversos mapas para excursiones y viajes por carreteras que sin dudas poseen referencias numéricas del tipo (1:100, 1:500, 1:50.000,…) que lo orientan para sus recorridos. Los mismos datos se encuentran en juguetes y autos o aviones en miniatura. En fin, que existe una multiplicidad de casos que confirman lo mencionado.
Pero si se quisiera llegar a la noción geométrica y abstracta de ese mecanismo de representación, tomando conciencia además, de que resulta una herramienta más que útil para la labor profesional de un arquitecto o diseñador, uno podrá investigar más en la rama matemática que usa por antonomasia esas relaciones.
Sin vincularse directamente a magnitudes escalares (asociación de un número con una unidad) existen datos que sirven para obtener información fidedigna sin necesidad de cálculo. Esa citada herramienta es la “topología**”**, que sintéticamente puede decirse que está dirigida al estudio de las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas, es decir por conceptos tales como: *proximidad*, *número de agujeros*, *tipo de consistencia* o *textura* que presentan los objetos. El trabajo que se presenta es indagar sobre esos principios a través de los contenidos diversos que posee esa rama matemática y mostrar ejemplos arquitectónicos y de diseño donde se analizan las características señaladas previamente en relación a las escalas.

Palabras clave
Diseño, Topología, Modelos, Proporciones, Ejemplos

Particularidades de la propuesta general
Objetivos: A través de las ideas centrales citadas en el anterior resumen preliminar, y basándose no solo en conclusiones elaboradas por el autor de

este trabajo, sino también en postulados de destacados epistemólogos que apoyan las ideas a desarrollar, se propone presentar a la topología como disciplina vinculada directamente a los conceptos centrales de las escalas y a sus aplicaciones como herramientas para el manejo de los procesos tecnológicos que conformarán las etapas finales de materialización de lo diseñado.
Originalidad del aporte: La clasificación de las subdisciplinas topológicas descriptas en este trabajo, y los ejemplos escogidos, muestran análisis que no es habitual encontrar en las bibliografías existentes sobre el tema y ausentes en general en los enfoques referidos a las génesis de las etapas iniciales de los proyectos de arquitectura y diseño.
Coherencia argumentativa: Como podrá verificarse en las siguientes líneas del cuerpo de este trabajo, se incluyen una reseña histórica y un juego de comparaciones dimensionales para enfatizar y mostrar novedosas ideas referidas a las posibilidades que ofrece el uso de escalas en la labor del diseñador hoy en día.
Metodología: Se propone a continuación, presentar a través de imágenes que constituyen ejemplos que acompañan y sustentan los conceptos centrales de este trabajo, cómo en numerosos casos aparecen las vinculaciones topológicas que se verifican en la arquitectura y el diseño a través de historias y problemas. Ello se acompaña con una breve referencia a mecanismos pedagógicos y didácticos aconsejables, referidos a la topología como área matemática que debe ser parte de la formación de un diseñador.

Desarrollo del tema

El modelo docente tradicional de explicaciones en la pizarra, profusamente llenas de simbología y de carácter magistral debe tender a modificarse, explorando nuevas formas y estrategias de comunicación para captar el interés y en particular motivar a los diseñadores y arquitectos para que se comprometan con un acercamiento a las ciencias matemáticas como útiles herramientas, no solo para concretar sus proyectos sino como disparadores de las ideas primigenias que rigen la creación de un hábitat. La rama matemática denominada topología es un excelente ejemplo de esa puerta de entrada a conceptos útiles para un diseñador.
Estas ideas previas las defendía y aplicaba con rigor un destacadísimo matemático que hizo escuela en ese sentido y a quien se lo recuerda con cariño y admiración por sus clases. Me refiero a Luis Santaló[1] cuyas disertaciones en la Facultad de Ciencias Exactas UBA eran seguidas por un nutrido auditorio que excedía a su alumnado. Alguna de sus especialidades eran el Cálculo Integral - método que permite hallar la relación entre magnitudes que cambian según ciertas reglas particulares - y las Geometrías no euclidianas, ramas matemáticas entre las cuales es posible incluir las escalas y la topología. Explayándonos sobre estas disciplinas que

[1] Luis Antonio Santaló i Sors (1911-2001) fue un matemático español que en 1939 se exilió a Argentina, donde dio clases en las universidades de Rosario, La Plata y Buenos Aires. En 1980 entre otras distinciones fue nombrado Presidente de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires. El autor de este trabajo lo tuvo honrosamente como Jurado en el Concurso en el que accedió a su cargo de Profesor Titular de Matemática FADU-UBA.

consideramos hermanadas, se señalan a continuación algunos de los conceptos que las caracterizan.

Homotecias

Uno de los conceptos geométricos que resulta una herramienta de suma utilidad en arquitectura y diseño es el de "semejanza". Aunque en el lenguaje cotidiano utilizamos el término "*semejante*" como sinónimo de "*parecido*", es conveniente diferenciar en qué: ¿en tamaño?, ¿en forma? Matemáticamente, sin embargo, puede acotarse la definición a señalar que: "dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño" (ver Figura 1 Logo de la FADU – UBA Biblioteca libre disponibilidad).

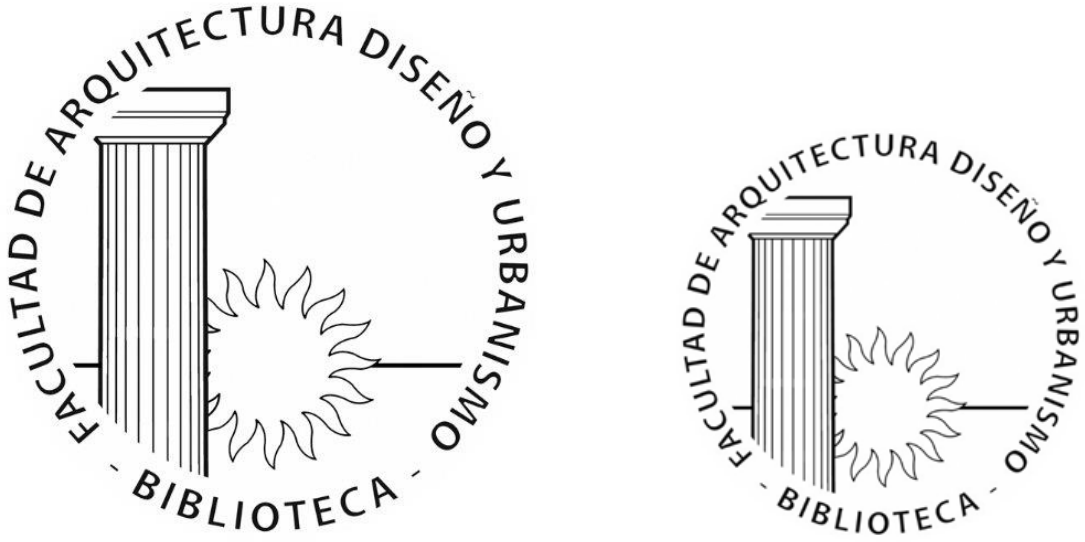
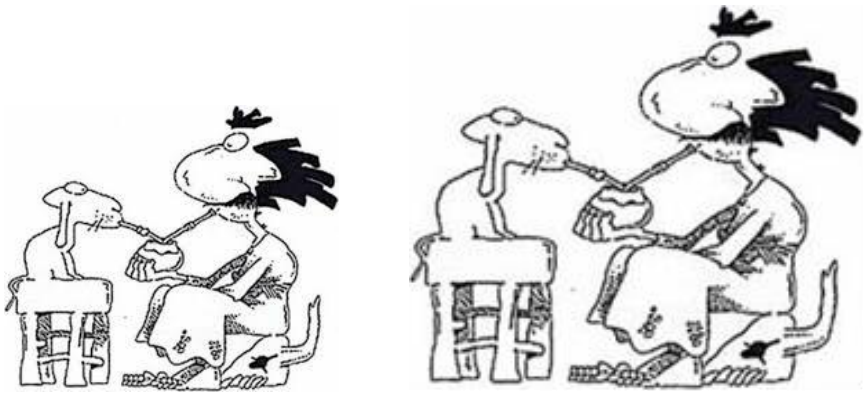


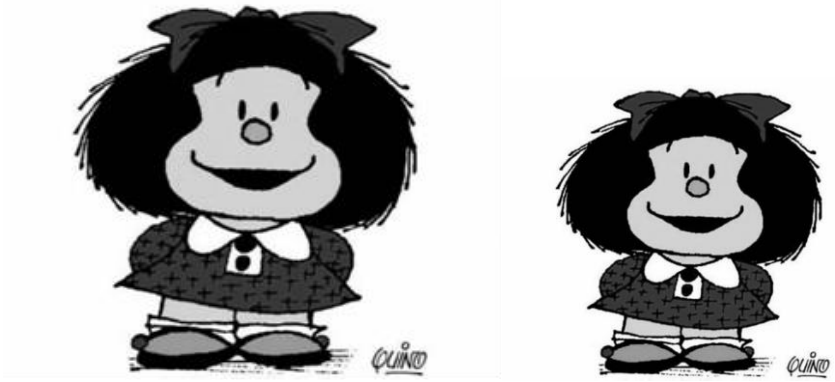
Figura 1

Además, el estudio de la semejanza o igualdad de figuras o cuerpos geométricos está estrechamente relacionado con el concepto de movimiento. Si se aplica a una figura geométrica o a un cuerpo un movimiento se puede obtener otra figura o cuerpo que sea de igual formato que el modelo original. A esto es a lo que en términos sencillos se lo llama “homotecia”**.**
Para crear una transformación homotética que provoque un aumento o disminución del tamaño original de la figura o cuerpo de los que se parte, se necesita un punto al que se le denomina “Centro de Homotecia” y una razón que denominaremos **k** que es un número con el cual se realiza esta Transformación Geométrica: si **k** >1 se produce un aumento en la figura o cuerpo originales e inversamente si **k** <1 el resultado será una reducción del

tamaño original (ver Figuras 2: - ejemplo E1 Inodoro Pereyra de Fontanarrosa[2] y ejemplo E2 Mafalda de Quino[3]).[4]



E1: De izquierda a derecha ejemplo de **k** >1



E2: De izquierda a derecha ejemplo de k<1

Figuras 2

Más precisamente, la homotecia puede definirse también como una transformación geométrica plana (R2) o tridimensional (R3), en la cual los

[2] Roberto Fontanarrosa (1944-2007), escritor, humorista gráfico y fanático de Rosario Central, nació en Rosario, provincia de Santa Fe, Argentina**.** En 1972 creó al famosísimo gaucho **Inodoro Pereyra** y a su perro parlante, **Mendieta**.

[3] Joaquín Salvador Lavado **"Quino"** (1932-2020) nació en Mendoza, Argentina. En 1964, su personaje **Mafalda** aparece por primera vez en la revista *Primera Plana.* Simpático personaje, originalmente creado para la publicidad, terminó logrando un enorme suceso internacional, ya que se transformó en la historieta latino-americana mas vendida en el mundo.

[4] Las figuras 2 son copias autorizadas por su autor del libro "TOPOLOGÍA" de Diseño Editorial registrado bajo el número ISBN 978-164360-508-1- Ley 11723 Art.10º.

puntos relacionados o transformados, que se denominan homotéticos, cumplen las siguientes condiciones: los puntos homotéticos están alineados con un tercero fijo, que como se dijo es el llamado centro de la homotecia (**O**). De tal forma, a partir de realizar una homotecia, lo que se está realizando es una transformación geométrica en la que a partir de una imagen o cuerpo dados, se obtienen una o varias figuras o cuerpos de tamaño mayor o menor a los dados originalmente. Ni más ni menos que un cambio de escala.

Veamos un par de ejemplos:

La que sigue (Figura 3 producida en Word por el autor) es una homotecia llamada directa o positiva, que es aquella en la cual el punto de homotecia (**O**) o centro de homotecia se encuentra después o antes de la figura trazada. La característica principal es que los segmentos entre la figura original y la resultante de la transformación (en el caso de polígonos) son paralelos. **A** y **A'** puntos referentes de dicha homotecia (para el caso general), están al mismo lado de **O**. La razón o valor de la transformación es **k = 3**, ya que la figura obtenida luego de la homotecia es tres veces mayor que la original.

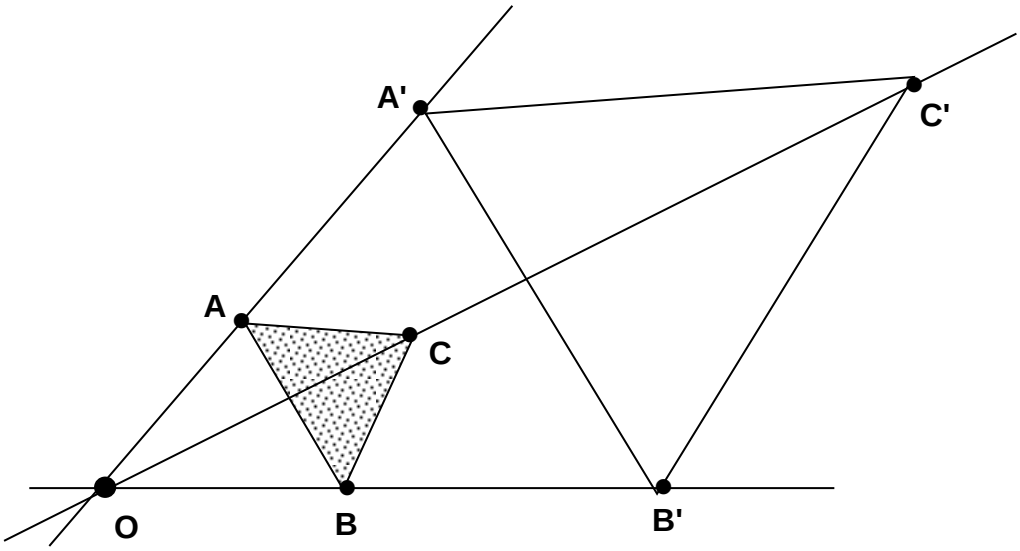


Figura 3

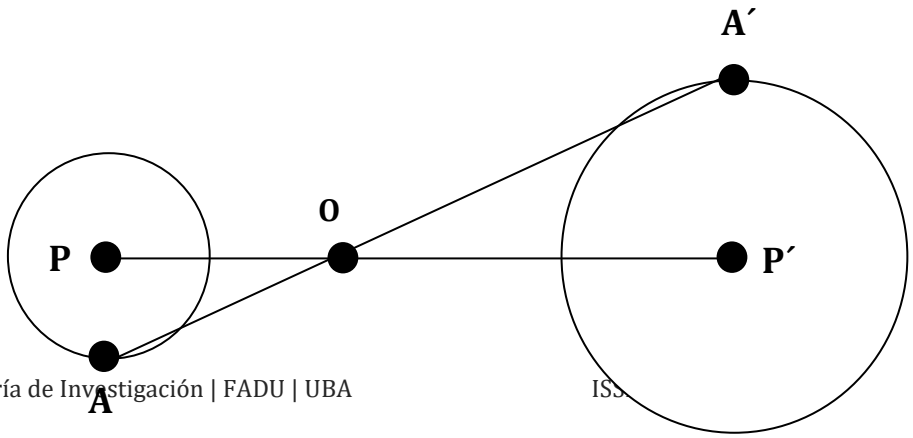


Figura 4

Si en cambio los puntos iniciales y sus homotéticos quedan en lados distintos del centro de homotecia, la homotecia se denomina inversa o negativa, que es el caso del ejemplo anterior (Figura 4 producida en Word por el autor). La razón de la transformación en este caso es **k = 2**, ya que la figura obtenida luego de la homotecia es dos veces mayor que la original.

Ejemplos y conclusiones

Un ejemplo arquitectónico de cambio de escala en un mismo complejo de viviendas, corresponde a las **Musgum mud huts**, estructuras familiares construidas por un pueblo de igual nombre, en una lejana provincia de Camerún, África. Las viviendas y edificios que integran el asentamiento se construyeron con estrictos diseños geométricos que poseen un esquema homotético totalmente topológico. (ver Figura 5 planta y vista en perspectiva[5])

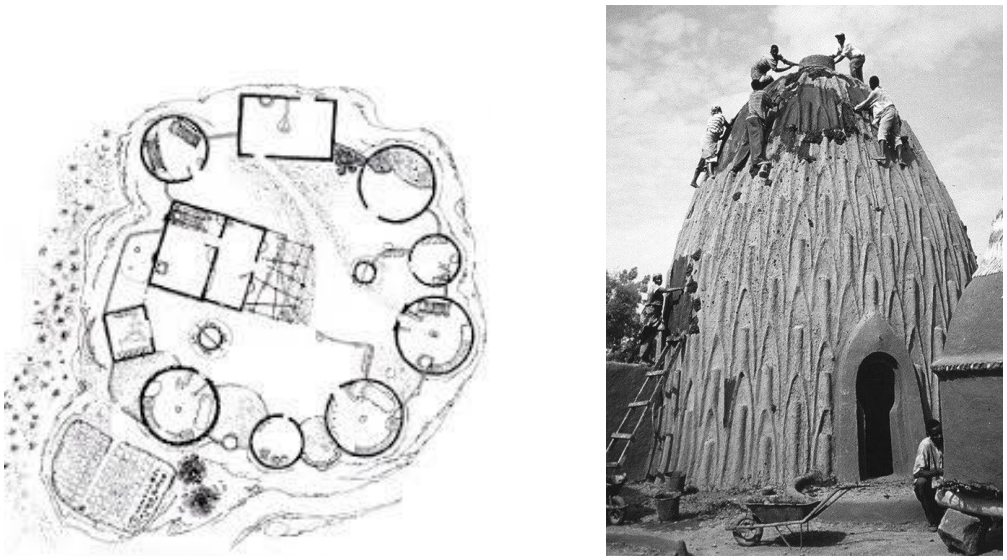


Figura 5

[5] Las figuras 5 son copias autorizadas por su autor del libro “TOPOLOGÍA” de Diseño Editorial registrado bajo el número ISBN 978-164360-508-1- Ley 11723 Art.10º.

Son un claro ejemplo de diseño espontáneo de pueblos antiquísimos, que construyeron siempre con técnicas simples que requieren escasas herramientas. El formato de cada unidad responde a un volumen generado por una curva catenaria rotando 360º, lo cual le agrega estabilidad y resistencia a la construcción. Es interesante señalar que los tamaños da cada unidad de planta circular responden a características vinculadas a jerarquías sociales del grupo habitacional, a necesidades de espacio para número de ocupantes y a técnicas constructivas ad hoc, como condicionantes principales.

Como se desprende de los conceptos previos, es indudable la vinculación que surge entre esa rama de la topología y las escalas, tema que nos ocupa en este trabajo y que resulta de tanta utilidad en el campo del diseño. Y como ejercitaciones novedosas que vinculan también a las escalas y a las transformaciones homotéticas, veamos un par de problemas que enlazan ambas ramas del conocimiento y que se consideran interesantes para plantear a los estudiantes de un curso de grado y porqué no, a profesionales del diseño por sus implicancias en el proceso de generar un proyecto determinado:

Problemas

El elefante, el picaflor y los viajes de Gulliver

*Proble*ma 1 - El elefante y el picaflor: Se propone averiguar cuánta es la cantidad de comida que comen por día un picaflor y un elefante. Luego refiéranse estos datos al peso promedio de cada animal y se tendrá una probable sorpresa por la diferencia proporcional. ¿Tendrá esto que ver con las escalas de tamaño, peso y superficie envolvente de sus cuerpos? Argumente el razonamiento.

Problema 2 - Los viajes de Gulliver: Respecto del cuento de Gulliver en Liliput, el país de los enanos[6], ¿Cuál es la contradicción que se verificaría en las propiedades físicas del gigante visitante y las de sus combativos anfitriones? ¿Sus esqueletos y masa corpórea serían de igual conformación estructural? ¿Y si no es así cual es la fundamentación?

Sinopsis - Cómo se desenvuelve la historia
Este último ejemplo trata sobre relatos de viajes y aventuras de apariencia inocente, donde el viajero va contando sus vivencias a lo largo de su camino, pero que incluyen en realidad una sátira mordaz sobre las estructuras y la cultura de la sociedad de la época. Lemuel Gulliver es un cirujano inglés al que le gusta viajar. Embarca en un viaje azaroso a los mares del sur cuando se desata una tormenta y en el naufragio va a parar a una isla. Esta isla, Liliput, está habitada por personas diminutas que lo capturan mientras duerme y lo llevan a la capital del reino, donde lo mantienen encadenado dentro de un gran templo abandonado. Al poco tiempo, Gulliver se vuelve gran amigo del

[6] Los habitantes de Liliput según Jonathan Swift el autor de los cuentos, miden unas 6 pulgadas de altura promedio, es decir ≈ 15cm.

emperador de Liliput, quien le pide ayuda para ganar la guerra contra Blefuscu, un reino también diminuto al otro lado de un canal. Gulliver accede y utiliza su gran tamaño para capturar a toda la marina enemiga de Liliput. A pesar del gran servicio que Gulliver ha hecho por los liliputienses, en su estadía, se gesta una conspiración en su contra, y el navegante debe escapar, logrando encontrar un bote de tamaño humano en una playa del lugar, que le permite ir remando hasta llegar a Australia, no muy lejos de ahí, donde lo auxilia un barco que lo lleva de regreso a su Inglaterra natal.

Respuestas

Problema 1: Un picaflor come hasta unos 10 gramos de comida por día y pesa aproximadamente 20 gramos y un elefante come 200 kg de alimento por día y si no es muy grande pesa un poco más de 2.000 kg.
Como se desprende de esos guarismos, el pajarito volador se alimenta con un 50% de su peso corporal diariamente, mientras que el paquidermo lo hace con tan solo un 10% de comida.
Y por cierto para ello hay una explicación válida, que es de tipo metabólica, pero está directamente vinculada a las escalas de sus dimensiones.
Básicamente el concepto central que hay que tener en consideración, es que al aumentar o disminuir las dimensiones de un objeto o un animal en este caso, las medidas de su volumen cambian exponencialmente al cubo, mientras que su envolvente (la piel) cambia de tamaño con un exponente menor, el cuadrado del valor anterior. Veamos un ejemplo geométrico sencillo:
Tomamos un cubo de 1m de arista, su volumen será de: 1m x 1m x 1m = $1m^3$ y su superficie envolvente igual a: (1m x 1m = $1m^2$ cada cara) por lo que multiplicado por las 6 caras que posee el cubo nos da un total de $6m^2$.
Si duplicamos su tamaño a 2m por arista y haciendo los cálculos equivalentes veremos que los nuevos valores resultan:

Volumen = $8m^3$ - Superficie envolvente = $24\ m^2$

Es decir que el volumen resultó ocho veces mayor que el anterior mientras que la superficie envolvente se cuadruplicó. Esta condición escalar se magnifica cuanto mayor es el cambio de tamaño. Y aquí es donde surge la solución al interrogante planteado.
No solo el picaflor consume mas calorías con su airoso vuelo y el elefante menos por su pausado caminar, sino que el ruiseñor disipa notoriamente mayor cantidad de calorías por su piel que el elefante en razón de sus tamaños, y consecuentemente ambos deben reponer dichas calorías ingiriendo proporcionalmente una cantidad de alimento respecto de su peso, que obviamente se relaciona con su volumen.

Problema 2: El principio rector que conduce a la respuesta al interrogante que plantea este caso es similar al del problema anterior.
Las notorias diferencias entre los tamaños de Gulliver y los habitantes de Liliput, implican que si ambos tuvieran esqueletos y masa corpórea de igual conformación y resistencia estructural, o los pies de Gulliver no lo soportarían

parado por ser de menor tamaño (medida al cuadrado de los pies de los liliputienses) respecto de su gran peso, o los pequeños habitantes de Liliput estarían dotados de una estructura ósea y muscular sobredimensionada. Se puede deducir similar razonamiento aunque simétricamente opuesto para el caso de la historia de Gulliver en el país de los gigantes.

En resumen, que no es posible cambiar de escala objetos y personas libremente, sin considerar los componentes o materiales de qué están hechos y cómo se modifican en ese caso sus características físicas.

Las maquetas

En el área del diseño es válido un ejemplo que convalida estas relaciones escalares. En cualquier maqueta a escala de un hábitat, las vigas de hormigón pasan a ser de madera balsa y las losas cementicias se transforman en placas de poliestireno expandido, por citar ejemplos habituales. La modelización escalar que genera el trabajo con maquetas en relación 1:10, 1:25,…o incluso 1:1 ha sido una técnica simple para favorecer la creatividad y la ejecución de obras arquitectónicas. Existen constancias que algunas pirámides se construyeron partiendo de maquetas grandes (1:10). Se sabe que los picapedreros medievales tenían maquetas de madera (1:1) de los elementos a esculpir en piedra.

Y el destacado arquitecto Antoni Gaudí se manejaba con maquetas en escala de los elementos constitutivos de sus obras y con modelos estructurales basados en funiculares de cargas que materializaba con pesas y cordeles suspendidos a su peso propio. Hoy nuevas técnicas con resinas y cortes robóticos están revolucionando el maquetaje, siendo el lenguaje matemático - topológico esencial para programar dichas realizaciones.

El caso de los muros de cerramiento

Finalmente se menciona otro ejemplo arquitectónico que se vincula asimismo a esta relación escalar de las dimensiones. Si se piensa en cuánto puede pesar el antes citado cubo de 1m de arista que esté constituido por un material de peso específico 1kg/m^3 su peso sería de 1kg y al ser su base de apoyo de 1 m^2 la presión resultante en la superficie en la que se apoya será p = 1kg/m^2. El cubo de doble tamaño, si fuera de igual material que el anterior, tendría un peso de 8kg y al estar apoyado en una base de 4m^2 la presión resultante en la superficie de apoyo será de p = 2kg/ m^2 lo que indica que las tensiones sobre el terreno se mantienen proporcionales al incremento. Por citar un ejemplo real, en la Ciudad de Buenos Aires la resistencia promedio de los terrenos comunes (no cercanos a vías de agua, de relleno, o arcillosos, etc. casos en los que los valores pueden variar substancialmente) es de 2.0kg/cm^2. Pero relacionando este ejemplo con las proporciones escalares antes descriptas, volúmenes y áreas envolventes, vale destacar que al reducirse proporcionalmente los cerramientos exteriores de distintos tamaños de hábitat, deberán tenerse muy en cuenta los cambios en los valores que resultarían de las aislaciones térmicas y acústicas con el entorno.

Colofón

Y se cierra así esta propuesta de ver las escalas desde un punto de vista más particular, en el que se ha tratado de puntualizar características que no se refieran tan solo a magnitudes indicadas con valores numéricos, sino por el contrario, a propiedades de orden topológico, donde se enfatizaron las relaciones entre elementos vinculados a la arquitectura y el diseño, con ejemplos en los que se ha buscado presentar la temática con un enfoque más novedoso y conceptual.

Bibliografía.

Fontanarrosa, R. - (1997) - Aventuras de Inodoro Pereyra - Buenos Aires, Argentina - Editorial: De la Flor.
Lavado, J. “Quino”. - (2001) - Toda Mafalda - Buenos Aires, Argentina - Editorial: De la Flor.
Nottoli, H. - (2023) - TOPOLOGÍA - Buenos Aires, Argentina - Diseño Editorial.
Nottoli, H. - (2023) - El arte de construir con madera - Buenos Aires, Argentina - Diseño Editorial.
Swift, J. - (2015) - Los viajes de Gulliver - Buenos Aires, Argentina - Editorial: Estación Mandioca.